

斜向拋射

(一) 拋體分析：

A、起始條件：

(1) 初速 V_0 ，斜角 θ

水平初速 $V_{0x} = V_0 \cos \theta$ (\rightarrow)

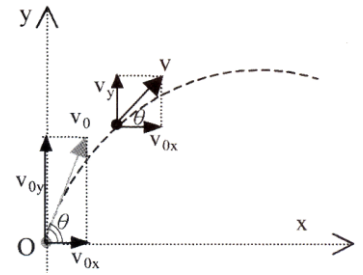
鉛直初速 $V_{0y} = V_0 \sin \theta$ (\uparrow)

(2) 受力情形：

水平方向不受力 \Rightarrow 等速度運動(慣性定律)

鉛直方向受重力 \Rightarrow 等加速度運動(運動定律)

V_{0y} 向上，加速度 $a_y = \text{重力加速度} = g$ (\downarrow) \Rightarrow 鉛直上拋



B、t 秒後情形：

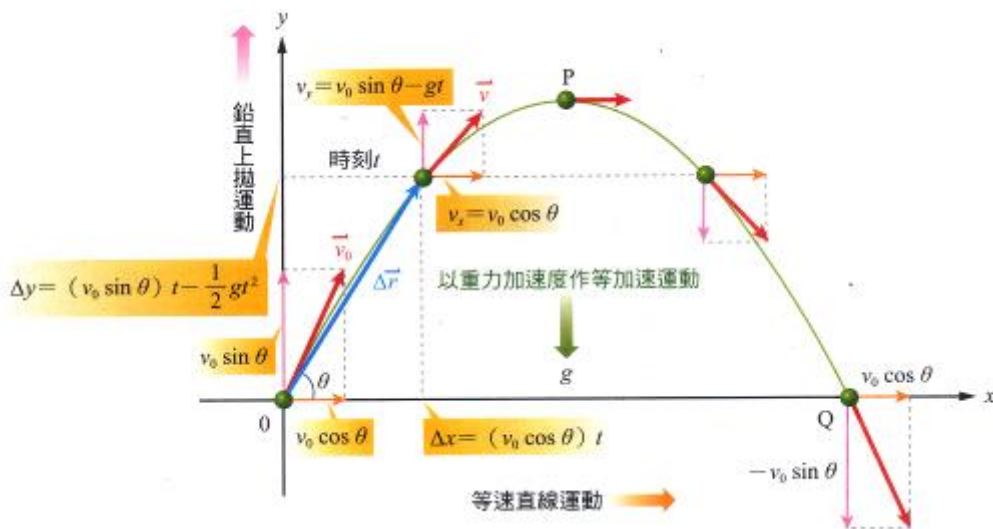
(1) 軌跡方程式：

$$x = V_{0x} \cdot t = (V_0 \cos \theta) \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad y = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y = v_0 \sin \theta \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = (\tan \theta)x - \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow y = \tan \theta x - \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta} \quad \text{圖形為開口向下的拋物線 } (y = ax - bx^2)$$



(2) $V_x = V_{0x} = V_0 \cos \theta$ (\rightarrow)

$V_y = V_{0y} - gt = V_0 \sin \theta - gt$

$$\Rightarrow \vec{v} = (v_0 \cos \theta)\hat{i} + (v_0 \sin \theta - gt)\hat{j}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta - gt)^2}$$

速度方向即為物體運動的方向 $= \tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$ θ ：和水平面的夾角

C、最高點：

(1) 時間(t)：

$$V_y = 0 \Rightarrow V_0 \sin \theta - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

(2) 最大高度(H)：

$$\text{最高點末速} = 0 \Rightarrow v^2 = v_{0y}^2 - 2gH = v_0^2 \sin^2 \theta - 2gH = 0$$

$$\Rightarrow v_0^2 \sin^2 \theta = 2gH \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

(3) 全程時間(T)：

a. 全程飛行時間 = 最大點時間的 2 倍 $\Rightarrow T = 2t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$

b. 鉛直上拋過程，同一水平面(高度)的速度大小會相等，方向相反。

$$\Rightarrow \text{鉛直初速} = V_0 \sin \theta \Rightarrow \text{鉛直末速} = -V_0 \sin \theta$$

$$-V_0 \sin \theta = V_0 \sin \theta - gT \Rightarrow 2V_0 \sin \theta = gT \Rightarrow T = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

(4) 水平射程(R)：

$$R = (V_0 \cos \theta)T = V_0 \cos \theta \left(\frac{2V_0 \sin \theta}{g} \right) = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g} \Rightarrow R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

(5) $\frac{R}{H} = ?$

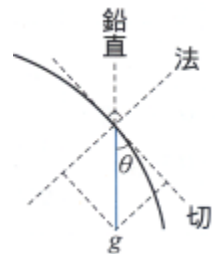
$$R : H = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} : \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} = 4 \cos \theta : \sin \theta = 4 \cot \theta : 1$$

$$\Rightarrow \frac{R}{H} = 4 \cot \theta \quad \text{或} \quad R = 4H \cot \theta$$

D、切線加速度(a_t)與法線加速度(a_n)：

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a_t}{a_n} \Rightarrow a_t = g \sin \theta \quad a_n = g \cos \theta$$

$$\text{最高點處} \quad V_y = 0 \quad V_x = V_0 \cos \theta \Rightarrow a_t = 0 \quad a_n = g(\downarrow)$$



(二) 討論：

A、最大水平射程：

$$R = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g} \text{ 為最大值時} \Rightarrow \sin 2\theta = 1$$

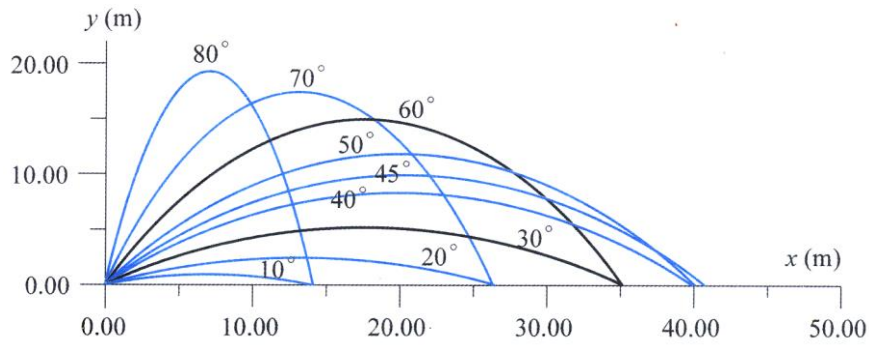
$$\text{此時} \quad 2\theta = 90^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

當斜拋仰角為 45° 時，有最大的水平射程 R

$$\Rightarrow R = \frac{V_0^2 \sin 2(45^\circ)}{g} = \frac{V_0^2 \sin 90^\circ}{g} = \frac{V_0^2}{g} \text{。}$$

由圖形可發現：

當 V_0 維持一定時，將 θ 由 0° 起逐漸增大，則水平射程亦逐漸增加，直到 45° 時，水平射程達到最大值，超過 45° 後增加 θ 值，則水平射程又逐漸減小。

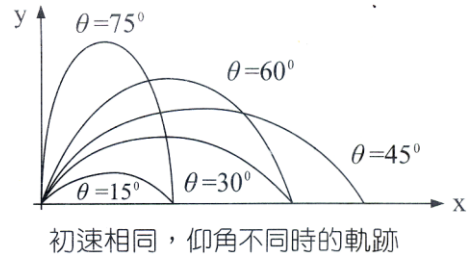
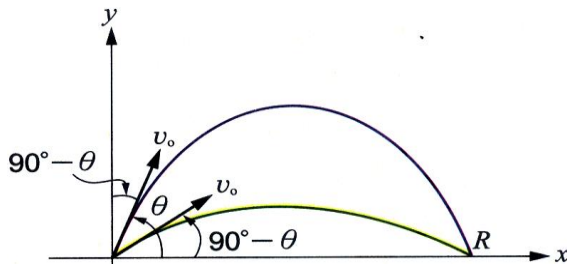


B、斜拋仰角互餘時：

(1) $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ \Rightarrow \theta_2 = 90^\circ - \theta_1$

$$R_2 = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_2}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2(90^\circ - \theta_1)}{g} = \frac{V_0^2 \sin (180^\circ - 2\theta_1)}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_1}{g} = R_1$$

當兩次的斜拋仰角互餘時，兩次的水平射程會相等。



(2) $R_1 = R_2$ 時 $\Rightarrow \frac{V_0^2 \sin 2\theta_1}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_2}{g} \Rightarrow \sin 2\theta_1 = \sin 2\theta_2$

$$\sin 2\theta_1 = \sin (180 - 2\theta_1) = \sin 2\theta_2 \Rightarrow 180 - 2\theta_1 = 2\theta_2$$

$$\Rightarrow 2\theta_1 + 2\theta_2 = 180^\circ \Rightarrow \theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

當兩次的水平射程相等時，斜拋的仰角必定互餘。

(三) 斜向拋射的特性：

A、斜拋至最高點所需的時間 t_1 = 從最高點落回原高度所需的時間 t_2 。

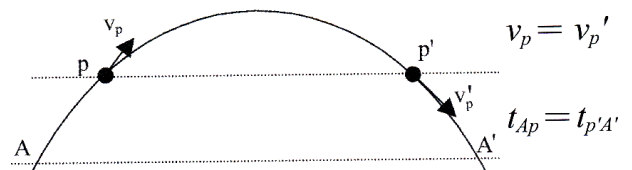
B、上升過程與下降過程中，在同一高度處有相同的速率，且角度相同，但是上升時原為仰角，下降至同一高度變為俯角。

水平等速度 $\Rightarrow V_{1x} = V_{2x} = V \cos \theta$

鉛直等加速度 $\Rightarrow V_{1y} = V_1 \sin \theta (\uparrow)$

$$V_{2y} = V_2 \sin \theta (\downarrow)$$

$$\Rightarrow |\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$$



C、上升與下降經相同的高度差，則所需的時間相同。

如上圖， $A \rightarrow P$ 所經的時間，與 $P' \rightarrow A'$ 所經的時間相同。 $\Rightarrow t_{AP} = t_{P'A'}$ 。

D、即使初速不同，飛行仰角不同，若鉛直速相同時，則：

(1) 飛行時間必定相同。

(2) 最大飛行高度必定相同。