

# 水平拋射

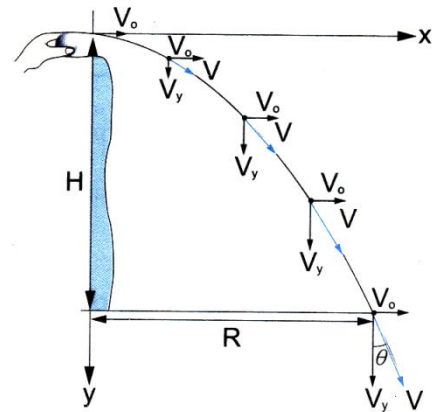
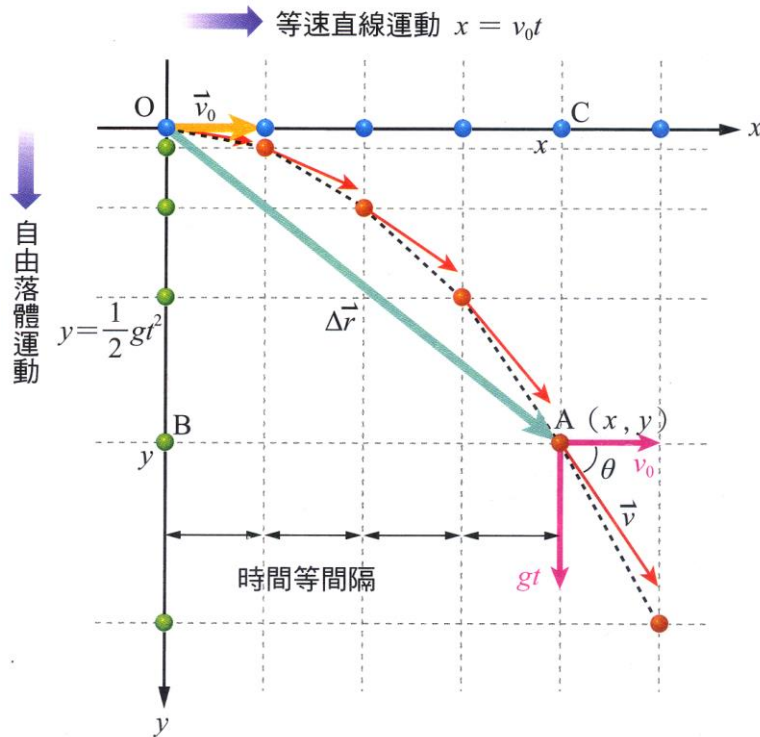
(一) 分析：

A、起始條件：

物體從高空落下，有向前的初速  $V_0$ ，運動過程中只受到重力作用。

水平方向： $V_{0x}=V_0$

鉛直方向：方向： $V_{0y}=0$



B、受力：

水平方向： 不受力  $\Rightarrow$  等速度運動(慣性定律)

鉛直方向： 受重力  $\Rightarrow$  等加速度運動(運動定律)

$$F=ma \Rightarrow w=mg=ma \Rightarrow a=g(\downarrow) \Rightarrow \text{自由落體}$$

水平拋射可視為『自由落體』+『等速度運動』。

C、運動過程：

(1)  $t$  秒後：

$$V_x=V_0 \quad V_y=gt$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{V_0^2 + g^2 t^2}$$

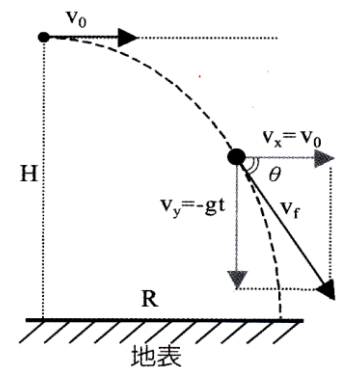
運動方向即為速度的方向，速度和水平夾角  $\theta$ ，

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}$$

$$x = V_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0}$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad (\text{軌跡方程式})$$

方程式滿足  $y=ax^2$  的形式，軌跡為拋物線。



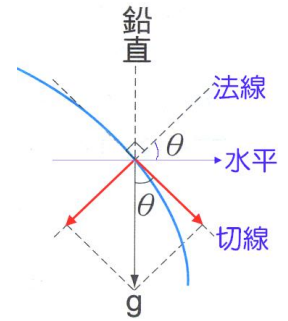
(2) 切線加速度( $a_t$ )與法線加速度( $a_n$ )

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0} = \frac{a_t}{a_n}$$

$$a_t = g \sin \theta$$

$$a_n = g \cos \theta$$

$$\Rightarrow g = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



【討論】：以初速=40m/s，重力加速度  $g=10\text{m/s}^2$  為例

1.  $t=1$  秒時：

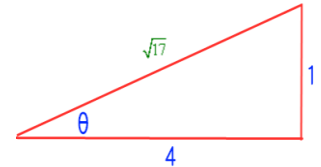
$$V_x = 40 \text{ m/s}$$

$$V_y = gt = 10 \times 1 = 10 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

$$x = 40 \times 1 = 40 \text{ m}$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (1)^2 = 5 \text{ m}$$



$$a_t = g \sin \theta = 10 \times \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{17}} \text{ m/s}^2$$

$$a_n = g \cos \theta = 10 \times \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{40}{\sqrt{17}} \text{ m/s}^2$$

2.  $t=2$  秒時：

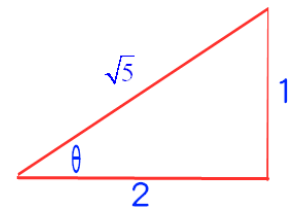
$$V_x = 40 \text{ m/s}$$

$$V_y = gt = 10 \times 2 = 20 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

$$x = 40 \times 2 = 80 \text{ m}$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (2)^2 = 20 \text{ m}$$



$$a_t = g \sin \theta = 10 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \text{ m/s}^2$$

$$a_n = g \cos \theta = 10 \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}} \text{ m/s}^2$$

3.  $t=3$  秒時：

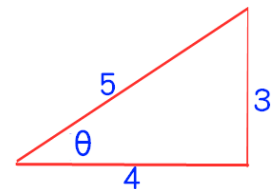
$$V_x = 40 \text{ m/s}$$

$$V_y = gt = 10 \times 3 = 30 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} \quad \theta = 37^\circ$$

$$x = 40 \times 3 = 120 \text{ m}$$

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = 45 \text{ m}$$



$$a_t = g \sin \theta = 10 \times \frac{3}{5} = 6 \text{ m/s}^2$$

$$a_n = g \cos \theta = 10 \times \frac{4}{5} = 8 \text{ m/s}^2$$

(二) 應用與討論：

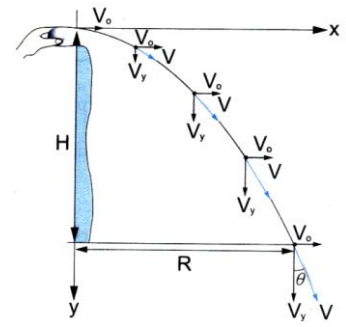
A、從高度 H 的頂樓上水平拋出一物體，初速度為  $V_0$  m/s

(1) 著地時間：

$$H = \frac{1}{2} g T^2 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

(2) 水平射程：

$$R = V_0 T \quad \Rightarrow \quad R = V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$



(3) 速度：

水平速度  $V_x = V_0$

$$\text{鉛直速度 } V_y = gT = g \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{2gH} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + 2gH}$$

(4) 著地方向：

$$V_x = V_0 \quad V_y = gT \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gT}{V_0} \quad \Rightarrow \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{2gH}}{V_0}$$

B、炮臺高 H，距離目標 X，欲擊中目標，求初速度  $V_0 = ?$

【思考】：1. 高度決定飛行時間，先求出時間 T。

2. 水平初速  $\times$  飛行時間 = 水平距離  $\Rightarrow$  求水平速度。

$$H = \frac{1}{2} g T^2 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$V_0 T = X \quad V_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = X \quad V_0 = X \sqrt{\frac{g}{2H}}$$

C、物體飛行的角度問題：

【思考】：1. 水平拋射無論任何角度，水平速度始終保持不變。

$$2. \quad \tan \theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \Rightarrow \quad \tan 37^\circ = 3/4 \quad \tan 53^\circ = 4/3$$

(1) 至俯角  $37^\circ$  所需時間  $t_1$ ：

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \Rightarrow \quad \tan 37^\circ = \frac{3}{4} = \frac{gt_1}{V_0} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{3V_0}{4g}$$

(2) 至俯角  $53^\circ$  所需時間  $t_2$ ：

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} \quad \Rightarrow \quad \tan 53^\circ = \frac{4}{3} = \frac{gt_2}{V_0} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{4V_0}{3g}$$

(3) 俯角  $37^\circ$  至俯角  $53^\circ$  所需時間 T：

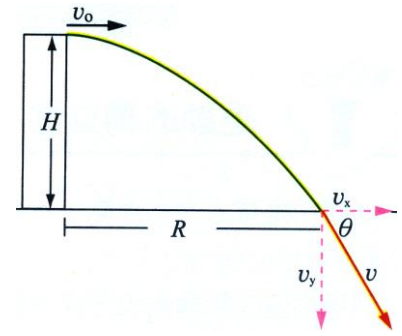
$$T = t_2 - t_1 = \frac{4V_0}{3g} - \frac{3V_0}{4g} = \frac{7V_0}{12g} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{7V_0}{12g}$$

D、樓頂上以初速  $V_0$  水平拋出一物，著地瞬間速度與水平夾角  $\theta$ 。

(1) 著地末速：

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y}{v_0} \Rightarrow \text{鉛直速度 } v_y = v_0 \tan \theta$$

$$\cos \theta = \frac{v_x}{V} = \frac{v_0}{V} \Rightarrow \text{切線速度 } V = \frac{v_0}{\cos \theta}$$



(2) 飛行時間 T：

$$v_y = gT = v_0 \tan \theta \Rightarrow T = \frac{v_0 \tan \theta}{g}$$

(3) 樓高 H：

$$H = \frac{1}{2} gT^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{v_0 \tan \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{2g} \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \tan^2 \theta}{2g}$$

(4) 水平射程 R：

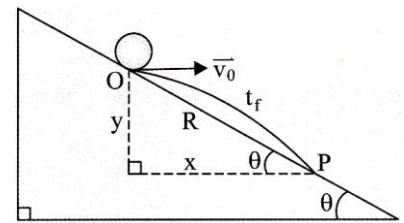
$$R = v_0 T = v_0 \left( \frac{v_0 \tan \theta}{g} \right) = \frac{v_0^2 \tan \theta}{g} \Rightarrow R = \frac{v_0^2 \tan \theta}{g}$$

E、初速度  $V_0$ ，在斜角為  $\theta$  的斜面頂端水平拋出一物體：

(1) 飛行時間：

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{2} g t^2}{v_0 t} = \frac{g t}{2v_0} \Rightarrow t = \frac{2v_0 \tan \theta}{g}$$



(2) 落點座標(x, y)：

$$x = v_0 t = \frac{2v_0^2 \tan \theta}{g} \quad y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left( \frac{2v_0 \tan \theta}{g} \right)^2 = \frac{4v_0^2 \tan^2 \theta}{2g} = \frac{2v_0^2 \tan^2 \theta}{g}$$

$$\Rightarrow (x, y) = \left( \frac{2v_0^2 \tan \theta}{g}, \frac{2v_0^2 \tan^2 \theta}{g} \right)$$

(3) 斜面射程 R：

$$R \cos \theta = x \Rightarrow R = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow R = \frac{x}{\cos \theta} = \frac{2v_0^2 \tan \theta}{g \cos \theta} = \frac{2v_0^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2v_0^2 \sin \theta}{g \cos^2 \theta}$$

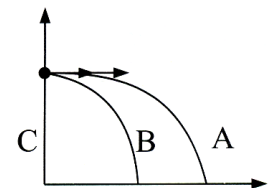
F、A、B、C 三物體在等高處，A、B 為水平拋射，C 為自由落體，且  $V_A > V_B$ ，則：

(1) 水平射程： $R_A > R_B$ 。

(2) 鉛直速度： $V_{Ay} = V_{By} = V_{Cy}$ 。

(3) 切線速度： $V_A > V_B > V_C$ 。

(4) 落地時間： $t_A = t_B = t_C$ 。



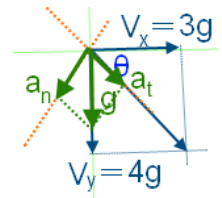
1. 以初速  $3g$  公尺/秒水平拋物運動，第 4 秒末，其切線加速度量值為何？(重力加速度為  $g$ )  
 (A) $g$  (B) $0.8g$  (C) $0.6g$  (D) $0.5g$  (E) $0.4g$ 。

【答案】：(B)

【解析】：水平等速度運動， $V_x = 3g$  m/s

第 4 秒末的鉛直速度  $V_y = gt = 4g$  m/s

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{4g}{3g} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = 53^\circ \quad \Rightarrow \quad a_t = g \cos \theta = g \cos 53^\circ = 0.8g$$



2. 以高出海平面  $80$  公尺的砲臺沿水平方向發砲，恰可擊中距砲臺  $1400$  公尺(水平距離)的敵艦，則砲彈出口之速率為多少？( $g = 10$  公尺/秒<sup>2</sup>)

(A) $350$  公尺/秒 (B) $1200$  公尺/秒 (C) $800$  公尺/秒 (D) $40$  公尺/秒。

【答案】：(A)

$$\text{【解析】： } h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad 80 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \quad \Rightarrow \quad t = 4 \text{ 秒}$$

$$x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad 1400 = v_0 \times 4 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{1400}{4} = 350 \text{ m/s}$$

3. 水平拋物運動初速  $10$  公尺/秒，當其切線加速度為  $5$  公尺/秒<sup>2</sup>時( $g = 10$  公尺/秒<sup>2</sup>)，此物已落下約

(A) $1.67$  公尺 (B) $2.5$  公尺 (C) $5$  公尺 (D) $8.66$  公尺 (E) $9.76$  公尺。

【答案】：(A)

$$\text{【解析】： } a_t = g \sin \theta \quad \Rightarrow \quad 5 = 10 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \tan 30^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y}{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$v_y^2 = 2gh \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2 \times 10 \times h = \frac{100}{3} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{100}{60} = 1.67 \text{ m}$$

4. 一球自樓頂水平拋出，若不計空氣阻力，則當速度與水平夾角各為  $37^\circ$  與  $53^\circ$  時，其速度量值的比為：

(A) $1 : 1$  (B) $1 : 3$  (C) $1 : 4$  (D) $3 : 4$  (E) $4 : 7$ 。

【答案】：(D)

$$\text{【解析】： 水平速度保持不變} \quad v_1 \cos 37^\circ = v_2 \cos 53^\circ \quad \Rightarrow \quad v_1 \times \frac{4}{5} = v_2 \times \frac{3}{5}$$

$$4v_1 = 3v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 : v_2 = 3 : 4$$

5. 物體作水平拋射運動，若不計空氣阻力，且物體仍在空中飛行期間，物體前進之水平距離與鉛直距離比為  $3 : 2$  時，其切線加速度值與法線加速度值之比為

(A) $3 : 2$  (B) $2 : 3$  (C) $3 : 4$  (D) $4 : 3$  (E) $1 : 1$ 。

【答案】：(D)

$$\text{【解析】： } x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad x : y = v_0 t : \frac{1}{2}gt^2 = 3 : 2$$

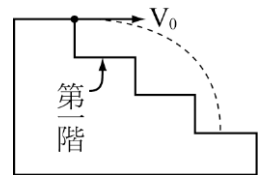
$$\Rightarrow \quad v_0 : \frac{1}{2}gt = 3 : 2 \quad \Rightarrow \quad 2v_0 = \frac{3}{2}gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4v_0}{3g}$$

$$\Rightarrow v_x = v_0 \quad v_y = gt = g\left(\frac{4v_0}{3g}\right) = \frac{4}{3}v_0$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\frac{4}{3}v_0}{v_0} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad a_t : a_n = 4 : 3$$

6. 在好漢坡的最高點以初速  $v_0 = 19.6$  公尺/秒將一石做水平拋射，若樓梯每階高度均為 50 公分、寬度為 80 公分，則請問石頭會落於第幾階？(設重力加速度  $g = 9.8$  公尺/秒<sup>2</sup>)

- (A) 小於第 40 階 (B) 第 40 階至第 50 階之間 (C) 第 50 階至第 60 階之間  
(D) 第 60 階至第 70 階之間 (E) 超過第 70 階。



【答案】：(D)

【解析】：假設落於第  $N$  階，則  $\frac{x}{y} = \frac{0.8N}{0.5N} = \frac{8}{5}$

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad x : y = v_0 t : \frac{1}{2}gt^2 = 8$$

$$v_0 : \frac{1}{2}gt = 8 : 1 \quad \Rightarrow \quad 5v_0 = 4gt \quad \Rightarrow \quad 5 \times 19.6 = 4 \times 9.8t \quad \Rightarrow \quad t = 2.5 \text{ 秒}$$

$$x = 19.6 \times 2.5 = 49 \text{ m} \quad \frac{49 \text{ m}}{0.8 \text{ m}} = 61.25 \text{ 階} \quad \Rightarrow \quad \text{落在第 62 階}$$

7. 一轟炸機以 100 公尺/秒的速率直線水平飛行且接近目標，若目標與飛機的垂直高度距離為 490 公尺，則飛機應在距離目標上空水平距離多少公尺處就要投下炸彈，才能準確轟炸目標物？(重力加速度為 9.8 公尺/秒<sup>2</sup>)

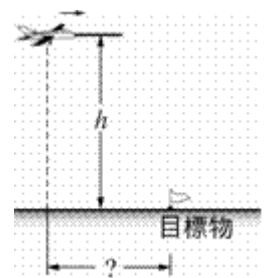
- (A) 1000 (B) 800 (C) 600 (D) 400 (E) 100 公尺。

【答案】：(A)

【解析】：  $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 490 = \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow t = 10 \text{ 秒} \Rightarrow x = 100 \times 10 = 1000 \text{ 公尺}$

8. 如圖，戰鬥轟炸機距離地面高  $h$ ，以  $v$  的水平速度飛行，欲成功炸射目標物，則飛機應距離目標物體水平距離為多遠時放下炸彈？(重力加速度為  $g$ )

- (A)  $\sqrt{\frac{h}{g}} \cdot v$  (B)  $\sqrt{\frac{2h}{g}} \cdot v$  (C)  $\sqrt{\frac{4h}{g}} \cdot v$  (D)  $\frac{2h}{g} \cdot v$  (E)  $\frac{h}{g} \cdot v$



【答案】：(B)

【解析】： $h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow x = vt = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

9. 一物體從高樓頂端被沿水平方向拋出，已知高樓頂端距離地面的高度為 80 公尺，而物體落地處和高樓之間的水平距離也是 80 公尺，重力加速度  $g = 10$  公尺/秒<sup>2</sup>，則物體被拋出時的初速為多少公尺/秒？

(A)1 (B)10 (C)20 (D)40 (E) $20\sqrt{2}$

【答案】：(C)

【解析】： $H = \frac{1}{2}gT^2 \Rightarrow 80 = \frac{1}{2} \times 10 T^2 \Rightarrow T = 4$  秒  
 $x = v_0 T \Rightarrow 80 = v_0 \times 4 \Rightarrow v_0 = 20$  m/s

10. 一物體作水平拋射運動，初速為 12 公尺/秒，若重力加速度  $g = 10$  公尺/秒<sup>2</sup>，則當其速率變為 15 公尺/秒時，此物體約已落下多少公尺？

(A)2 (B)4 (C)5 (D)7 (E)9。

【答案】：(B)

【解析】： $v_x = V \cos \theta \Rightarrow 12 = 15 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = 37^\circ$   
 $v_y = V \sin \theta \Rightarrow v_y = 15 \sin 37^\circ = 15 \times \frac{3}{5} = 9$  m/s  
 $v_y^2 = 2gh \Rightarrow 9^2 = 2 \times 10 h \Rightarrow h = \frac{81}{20} = 4.05 \text{ m} \approx 4$  m

11. 不計空氣阻力，自塔頂以 10 公尺/秒的初速水平拋出一球，若重力加速度  $g = 10$  公尺/秒<sup>2</sup>，球著地時的水平位移為 30 公尺，則塔頂的高度為多少公尺？

(A)10 (B)15 (C)25 (D)30 (E)45。

【答案】：(E)

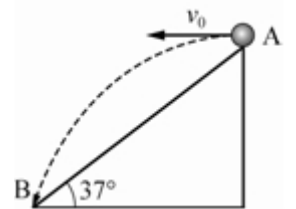
【解析】： $x = v_0 t \Rightarrow 30 = 10t \Rightarrow t = 3$  秒  $\Rightarrow H = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 3^2 = 45$  m

12. 如圖，自斜面的頂點 A 以初速  $v_0$  水平拋出一球，若恰好落在斜面的底點 B，且不計空氣阻力的影響，重力加速度為  $g$ ，則由 A 點飛行至 B 點所需的時間為何？

(A)  $\frac{6v_0}{5g}$  (B)  $\frac{3v_0}{5g}$  (C)  $\frac{3v_0}{g}$  (D)  $\frac{2v_0}{g}$  (E)  $\frac{3v_0}{2g}$

【答案】：(E)

【解析】： $x = v_0 t$   $y = \frac{1}{2}gt^2$



$\frac{x}{y} = \frac{v_0 t}{\frac{1}{2}gt^2} = \frac{2v_0}{gt} = \cot 37^\circ = \frac{4}{3} \Rightarrow 4gt = 6v_0 \Rightarrow t = \frac{6v_0}{4g} = \frac{3v_0}{2g}$

13. 地表附近將一小物體自離地面高  $h$  處以多大的初速水平拋出時，其水平射程為  $2h$ ？

(A)  $\sqrt{\frac{gh}{2}}$  (B)  $\sqrt{gh}$  (C)  $2\sqrt{gh}$  (D)  $\sqrt{2gh}$  (E)  $2\sqrt{2gh}$  (不計空氣阻力，且  $g$  為重力加速度)

【答案】：(D)

$$\text{【解析】： } h = \frac{1}{2} g T^2 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$x = v_0 T = 2h \quad \Rightarrow \quad v_0 T = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2h \quad \Rightarrow \quad v_0 = 2h \times \sqrt{\frac{g}{2h}} = \sqrt{2g}$$