

專題討論(1)

導函數的應用



(一) 導函數的物理意義：

A、質點運動函數的討論：

(1) 若質點運動的位置-時間關係可以函數表示時，我們可將此函數以 $x-t$ 圖形表示。

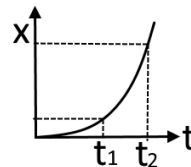
(2) 假設質點運動的位置函數為 $x=f(t)=at^2$ ，則

時間由 $t_1 \rightarrow t_2$ ，位置由 $x_1 \rightarrow x_2$ ，

$$\text{此時平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1},$$

令 $t_2 = t_1 + \Delta t$ ，則

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{a(t_1 + \Delta t)^2 - at_1^2}{(t_1 + \Delta t) - t_1} = \frac{a(t_1^2 + 2t_1\Delta t + \Delta t^2) - at_1^2}{\Delta t} \\ &= \frac{a(2t_1\Delta t + \Delta t^2)}{\Delta t} = 2at_1 + a\Delta t \end{aligned}$$



(3) 當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時，此時 $x-t$ 圖形的割線，漸接近成為切線，而質點運動的平均速度也逐漸接近成為瞬時速度，而此時的函數關係：

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2at_1 + a\Delta t) = 2at_1$$

B、若質點運動的位置函數為 $x = f(t) = at^n$ ，則

$$(1) \text{質點運動的平均速度 } \bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{a(t_1 + \Delta t)^n - at_1^n}{t_1 + \Delta t - t_1}$$

當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時， $x-t$ 圖形的割線，漸接近成為切線，而質點運動的平均速度也逐漸接近成為瞬時速度，而此時的函數關係：

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t_1 + \Delta t)^n - at_1^n}{t_1 + \Delta t - t_1}$$

依二項式展開，由於 Δt 極小，因此取前兩項近似值，可得

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t_1 + \Delta t)^n - at_1^n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(t_1^n + n t_1^{n-1} \Delta t + \dots) - at_1^n}{\Delta t} = \frac{a(n t_1^{n-1} \Delta t)}{\Delta t} = an t_1^{n-1}$$

(2) 結論： $x(t) = at^n$ 求導函數，可得 $v(t) = ant^{n-1}$

(3) 推論： $x(t)$ 為多項式函數， $x(t) = at^n + bt^{n-1} + ct^{n-2} + \dots$

則由 $x(t)$ 求導函數，可得 $v(t) = ant^{n-1} + b(n-1)t^{n-2} + c(n-2)t^{n-3} + \dots$

C、將質點運動的位置-時間函數微分(導函數)，可得到速度-時間函數；

將質點運動的速度-時間函數微分(導函數)，可得到加速度-時間函數。

$$\text{即 } x(t) \xrightleftharpoons[\text{積分(面積)}]{\text{微分(導函數)}} v(t) \xrightleftharpoons[\text{積分(面積)}]{\text{微分(導函數)}} a(t)$$

範例 1

1. 完成下列的 $v(t)$ 及 $a(t)$ 函數：

(1) $x(t) = -2t^4 + 5t^3 - 4t^2 + 10$

(2) $x(t) = 3t^3 - 2t^2 + t - 6$

(3) $x(t) = 6t^2 - 4t + 3$

(4) $x(t) = \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{2}t + 5$

(5) $x(t) = \frac{3}{4}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{3}t - 2$

(6) $x(t) = \frac{5}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2 - \frac{3}{2}t - 5$

【答案】：

範例 2

某運動質點之位置與時間函數關係為 $x(t) = -3t^2 + 6t + 2$ 。(x：公尺，t：秒)，求此質點：

(1) 最初之位置為_____公尺；

(2) 3 秒內之平均速度為_____公尺/秒；

(3) 第 2~5 秒內之平均加速度為_____ m/s^2 ；

(4) 3 秒內運動之路徑長為_____。

【答案】：(1)2 (2)-3 (3)-6 (4)15

範例 3

已知運動位置(x)與時間(t)之關係為 $x(t) = 2t^2 - 8t - 24$ ，x 以公尺為單位，t 以秒為單位，則：

(1) 在第_____秒時，經過原點。

(2) 出發後，再經_____秒會經過原出發點。

(3) 第_____秒時開始反向運動。

(4) 質點在方向改變前，最大的位移量值為_____ m。

(5) 10 秒內的平均速度為 _____ m/s。

(6) 10 秒內的平均速率為 _____ m/s。

(7) 質點在 0~4 秒內的平均加速度為 _____ m/s^2 。

【答案】：(1)6 (2)4 (3)2 (4)8 (5)12 (6)13.6 (7)4

類題

專題討論(1)_導函數的應用

類1.【題組】質點在一直線上運動，其位置與時間的關係經分析得 $x = t^2 + 5t - 3$ (位置與時間的單位分別為米與秒)，請回答下列問題：

- (1)此質點在第 7 秒末的瞬時速度大小(米/秒)為_____m/s。
- (2)該質點在第 7 秒末的瞬時加速度大小(米/秒²)為_____m/s²。
- (3)該質點在最初 10 秒內的平均速度大小(米/秒)為_____m/s。

類2.【題組】質點沿 x 軸運動，其位置依下式隨時間而定： $x = 3t^2 - t^3$ (x 用米，t 用秒為單位)，若以向東為正，請回答下列問題：

- (1)物體向右行之最大距離為_____公尺。
- (2)質點在最初 4 秒內所行之路徑長_____公尺。
- (3)質點第 4 秒末之速度為_____公尺/秒，方向沿_____方向。
- (4)第 4 秒末之加速度大小為_____公尺/秒²。

類3.【題組】質點在直線上運動，其位置與時間關係為 $x = t^3 + 2t^2 - 3t + 4$ (位置與時間之單位分別為公尺與秒)，請回答下列問題：

- (1)質點在第 1~3 秒間的平均速度為_____m/s。
- (2)質點在第 3 秒末的瞬時速度為_____m/s。
- (3)質點在第 1 秒末至第 3 秒末的平均加速度為_____m/s²。
- (4)質點在第 3 秒末的瞬時加速度為_____m/s²。

類4.【題組】質點在直線上運動，其位置與時間關係為 $x = -t^2 + 6t - 4$ (位置與時間之單位分別為公尺與秒)，請回答下列問題：

- (1)質點的出發點在_____公尺處。
- (2)質點在 3 秒內的位移為_____公尺。
- (3)質點在第 1 秒內的位移與第 2 秒內的位移，比值為_____。
- (4)質點在 0~5 秒間的路徑長為_____公尺。

類5. 【題組】進行直線運動的某質點，其位置 x (公尺)與時間 t (秒)的關係為 $x = -6t^2 + 18t + 24$ ，若定初速方向為正向，請回答下列問題：

- (1)初速度為_____ m/s 。
- (2)加速度為_____ m/s^2 。
- (3)質點在第_____秒末速度為零。
- (4)質點在第_____秒末回到原出發點。
- (5)最遠的正向位置坐標為_____公尺。

類6. 【題組】某質點之位置與時間的關係為 $x(t) = t^2 - 2t - 3$ ， x 單位為公尺、 t 單位為秒，請回答下列問題：

- (1)出發點的位置為_____公尺。
- (2)4 秒內的平均速度為_____ m/s 。
- (3)在負 x 軸的最遠位置為_____公尺。
- (4)4 秒內的平均速率為_____ m/s 。
- (5)第_____秒的速度為零。

類7. 【題組】某運動物體位置(x) 與時間(t) 的函數關係為 $x = -2t^2 + 4t + 1$ (M.K.S.制) (x : 公尺 ; t : 秒)，請回答下列問題：

- (1)3 秒內的平均速度為_____公尺/秒。
- (2)3 秒內的平均速率為_____公尺/秒。
- (3)第_____秒末物體的速度為零。

類8. 【題組】沿直線前進的物體，其位置可以 $x(t) = -3t - 4t^2 + t^3$ 表示， x 單位是公尺， t 單位是秒。試求：

- (1)在 $t=0$ 和 $t=4$ 秒間，物體所走過之路徑長為_____公尺。
- (2)在 $t=0$ 和 $t=4$ 秒間，所經的位移為_____公尺。
- (3)在 $t=2$ 和 $t=4$ 秒間的平均加速度為_____公尺/秒²。

綜合練習

專題討論(1) 導函數的應用

- ___ 1. 一質點的運動方程式為 $x = 36 - 12t + t^2$ (單位為SI制), 則此質點從 $t = 0$ 到 $t = 12$ 秒的這段時間內, 質點的平均速率為多少公尺/秒?
(A) 0 (B) 6 (C) 9 (D) 10 (E) 16。
- ___ 2. 一質點在直線上運動, 其位置與時間關係為 $x = 3 + t - 2t^2$ (位置與時間的單位分別為公尺與秒), 質點正向最大位移為若干公尺?
(A) 0 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{25}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) 6。
- ___ 3. 質點作直線運動, 其 $x - t$ 關係為 $x = -2t^2 + 12t + 3$ ($x : m ; t : s$), 則 $0 \sim 5$ 秒之平均速率為何?
(A) 5.2 (B) 5.0 (C) 4.8 (D) 4.6 (E) 4.4 公尺/秒。
- ___ 4. 已知質點速度-時間關係式為 $v = 2t - 4$, 下列敘述哪些正確?(多選)
(A) 質點起初往負向運動 (B) 位置-時間關係式為 $x = t^2 - 4t$ (C) 2秒時質點折返
(D) 承(C), 此時位置為 -4 (E) 前4秒平均速度為零。
- ___ 5. 有一運動體之位置 x 與時間 t 之關係為 $x = t^2 - 2t + 5$, 則下列敘述何者為正確?(式中採用MKS制)(多選)
(A) 此物作等加速運動 (B) 此物之初速度為 -2 m/s (C) 此物運動軌跡可能為拋物線
(D) 此物在改變運動方向時的位置為 4 m (E) 此物之速率隨時間而漸增。
- ___ 6. 鉛直上拋一球, 今定向上為正, 其位置對時間之關係為 $x = -5t^2 + 20t - 15$, 則球在哪些時間內恆向上運動?(多選)
(A) 0至1秒 (B) 1至2秒 (C) 2至3秒 (D) 3至4秒 (E) 4至5秒。
- ___ 7. 一直線上運動物體, 位置與時間的關係為 $x = pt^2 + qt - 7$ ($x : \text{公尺}, t : \text{秒}$), p, q 為常數, 若其初速為 -2 公尺/秒, 前2秒內之平均速度為0, 則:(多選)
(A) 常數 $p = 1$ (B) 在 $x = -1$ 公尺時, 改變運動方向 (C) 常數 $q = 2$
(D) 軌跡可能為拋物線 (E) 此物作等加速運動。
- ___ 8. 質點的運動位置為 $x(t) = 36 - 12t + t^2$ (單位用MKS制), 則此質點從0到12秒運動過程的平均速率為何?
(A) 3 (B) 0 (C) 6 (D) 12 (E) 16 公尺/秒。
- 【題組】一質點運動路徑長 S 與時間 t 的關係為 $S(t) = 3t + 5t^2$, 單位採SI制, 則:
- ___ 9. 最初2秒內平均速率為若干公尺/秒?
(A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 17 (E) 21 公尺。
- ___ 10. 第2秒末速率為若干公尺/秒?
(A) 13 (B) 17 (C) 19 (D) 23 (E) 27 公尺/秒。

- ____ 11. 質點的速度與時間的關係為 $v = 2t - 3$ (m/s)，已知出發點為 $x = -2$ (m)，則：(多選)
 (A) 質點的位置與時間關係滿足 $x = t^2 - 3t - 2$ (m) (B) 質點在 x 軸上運動時，其與出發點相距的負向最大距離為 $\frac{9}{4}$ m (C) 承(B)，當時的時刻為 $\frac{3}{2}$ 秒 (D) 質點於 0 ~ 2 秒的平均速率為 1 m/s (E) 質點再次通過出發點的時刻為 $\frac{3}{2}$ 秒。
- ____ 12. 質點作直線運動，其位置對時間關係可表示為 $d(t) = t^3 + 2t^2 - 3t + 4$ (SI制)，則質點在第 1 秒末至第 3 秒末之平均速度為若干 m/s？
 (A) 20 (B) 18 (C) 16 (D) 14 (E) 10 m/s。
- ____ 13. 承上題，質點在第 3 秒末之瞬時速度為若干 m/s？
 (A) 18 (B) 24 (C) 36 (D) 48 (E) 54 m/s。
- ____ 14. 承上題，質點在第 1 秒末至第 3 秒末之平均加速度為若干 m/s²？
 (A) 20 (B) 18 (C) 17 (D) 16 (E) 12 m/s²。
- ____ 15. 承上題，質點在第 3 秒末之瞬時加速度為若干 m/s²？
 (A) 20 (B) 18 (C) 22 (D) 16 (E) 24 m/s²。
- 【題組】質點在直線上運動之位置(x)－時間(t)函數關係為 $x = 2 + 4t - t^2$ ，x 之單位為 m，t 之單位為 s，則：
- ____ 16. 此質點最初之位置為若干 m？
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3 公尺。
- ____ 17. 此質點在 3 秒內運動之路徑長為若干公尺？
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7 公尺。
- ____ 18. 此質點在 3 秒內之位移為若干公尺？
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3 公尺。
- ____ 19. 此質點在第 2 秒內之位移為若干公尺？
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3 公尺。
- 【題組】已知運動之位置(x) 與時間(t) 之關係為 $x(t) = t^2 - 2t + 1$ ，x 以公尺為單位，t 以秒為單位，請回答 20 ~ 22 題：
- ____ 20. 以原點為參考點，則此物體的出發位置為若干公尺？
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3 公尺。
- ____ 21. 5 秒內的平均速度為若干 m/s？
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 3 公尺。
- ____ 22. 第 3 秒內的平均速率為若干 m/s？
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 公尺。

- ____ 23. 在直線上作運動的一質點，其位置隨時間變化的關係式為 $x(t) = 5 + 8t - 2t^2$ (SI制)，則下列有關質點運動的敘述何者正確？(多選)
 (A) 3秒內的位移為 + 11公尺 (B) 3秒內的路徑長為10公尺 (C) 最大正向位移為 + 13公尺 (D) 3秒末的瞬時速度為 - 4公尺/秒 (E) 3秒末的速率漸增當中。
- ____ 24. 某質點作等加速運動，其位置 x 對時間 t 的關係為： $x = 3t^2 - 6t + 2$ (單位：SI制)，則此質點 (多選)
 (A) 作等加速運動 (B) 加速度為3公尺/秒² (C) 加速度為6公尺/秒²
 (D) 速率先增後減 (E) 速率先減後增。
- ____ 25. 某運動質點位置與時間關係為 $x(t) = 2t^2 - 4t + 5$ (SI制)，則下列敘述何者正確？(多選)
 (A) 質點運動軌跡為拋物線 (B) 質點3秒內位移大小為6公尺 (C) 質點3秒內平均速率為2公尺/秒 (D) 質點第3秒末瞬時速度大小為2公尺/秒 (E) 質點作等加速運動。
- ____ 26. 進行直線運動的某質點，其位置 x (公尺) 與時間 t (秒) 的關係為 $x = -6t^2 + 24t$ ，若定初速方向為正向，則下列敘述何項正確？(多選)
 (A) 初速度為12公尺/秒 (B) 加速度為 - 12公尺/秒² (C) 質點在第4秒末速度為零
 (D) 質點在第4秒末回到原出發點 (E) 最遠的正向距離為24公尺。
- ____ 27. 若位置函數為 $d = 3 + t - 2t^2$ ，則質點何時通過原點？
 (A) $t = \frac{1}{2}$ 秒 (B) $t = 1$ 秒 (C) $t = \frac{3}{2}$ 秒 (D) $t = 2$ 秒 (E) $t = \frac{5}{2}$ 秒。
- ____ 28. 承上題，質點何時做反向運動？
 (A) $t = \frac{3}{2}$ 秒 (B) $t < \frac{3}{2}$ 秒 (C) $t > \frac{3}{2}$ 秒 (D) $t > \frac{1}{4}$ 秒 (E) $0 < t < \frac{1}{4}$ 秒。
- ____ 29. 承上題，若質點在 0~4 秒的平均加速度為 a_1 ，第4秒的瞬時加速度為 a_2 ，則比較 a_1 與 a_2 的關係？
 (A) $a_1 > a_2$ (B) $a_1 < a_2$ (C) a_1 與 a_2 等值異號 (D) $a_1 = a_2 > 0$ (E) $a_1 = a_2 < 0$ 。

專題討論(1)_導函數的應用_標準答案：

類題：

- 1.(1)19, (2)2, (3)15 2.(1)4,(2)24, (3)24, 西, (4)18 3.(1)18, (2)36, (3)16, (4)22
 4.(1)-4, (2)9, (3)5/3, (4)13 5.(1)18, (2)-12, (3)1.5, (4)3, (5)37.5
 6.(1)-3, (2)2, (3)-4, (4)2.5, (5)1 7.(1)-2, (2)10/3, (3)1 8.(1)24, (2)-12, (3)10

二、綜合練習：

- 1.B 2.B 3.A 4.ACE 5.ABD 6.AB 7.AE 8.C 9.C 10.D
 11.ABC 12.B 13.C 14.D 15.C 16.D 17.C 18.E 19.C 20.C
 21.E 22.C 23.BDE 24.ACE 25.BE 26.BDE 27.C 28.D 29.E